אי שיוויונים איזופרימטריים, תופעת ריכוז-המידה, קמירות, ושימושיהם

(סמסטר חורף, קורס 106433 – "נושאים באנליזה פונקציונלית")

מרצה: עמנואל מילמן.

זמן: ימי ד', 14:30-17:30. היכן: טרם נקבע, קרוב לוודאי בזום.

שימו לב, בסיכוי גבוה הקורס יועבר באנגלית (בהתאם לדרישה).

הדבר הכי חשוב לדעת על הקורס הוא – אין קשר ישיר לאנליזה פונקציונלית, אלא יותר לגיאומטריה ואנליזה. מבחינה זו הקורס יהיה אינטר-דיסיפלינרי.

בהינתן מרחב מטרי המצוייד במידה (metric-measure space), קיימות דרכים רבות למדוד את האינטרקציה בין המידה למטריקה. בקורס נלמד על מגוון דרכים אלה, בדגש על שימושיהן והקשר לתחומים כמו אנליזה גיאומטרית אסימפטוטית (חקר גופים קמורים והכללותיהם במרחב אוקלידי ממימד גבוה), ספקטרום הלפלסיאן, אגודות חום (heat semi-groups), עקמומיות Ricci מוכללת, ועוד.

נקודת ההתחלה שלנו תהיה אי-שיוויונים איזופרימטריים, המספקים חסם תחתון על שטח פנים של קבוצה בעלת מידה נתונה (כבר היוונים הקדמונים ידעו כי עיגול במרחב הינו בעל היקף מינימלי מבין כל הפוליגונים משטח נתון). נוכיח את האי שיוויונים במרחבים הקלאסיים (אוקלידי, ספירה) ובמרחב גאוסי, ונקשרם לאי שיוויון Brunn-Minkowski והכללותיו. משם נמשיך למרחב הגאוסי (משפט Sudakov-Tsirelson / Borell) ויתכן כי גם ליריעות עם עקמומיות Ricci חיובית (משפט Gromov-Levy). נראה כיצד סימטריזציה מניבה אי-שיוויונים איזופרימטריים ואחרים.

אחיהם הקטנים של האי-שיוויונים האיזופרימטריים הינם אי-שיוויוני ריכוז המידה, המובילים לתופעת ריכוז המידה במרחבים ממימד גבוה (concentration of measure phenomenon). אחיהם האמצעיים הינם אי-שיוויונים אנליטיים כדוגמת אי-שיוויוני Poincare ו-log-Sobolev. נלמד על הקשרים בין אי-שיוויונים אלה באופן כללי (נוסחת Co-Area ואי שיוויון Cheeger) ובהנחת חסם תחתון על עקמומיות Ricci של המרחב (אי שיוויון Buser-Ledoux). נראה שעקמומיות חיובית אחראית לקיום פער ספקטרלי (אי-שיוויני Lichnerowicz ו-Brascamp-Lieb).

המטרה תהיה להנות וללמוד, ואנסה לנווט את הקורס בגמישות מירבית. הציון יבוסס על שילוב של השתתפות, חשיבה על תרגילים, ומבחן בית בסוף הקורס.

<u>דרישות קדם</u>: לא משהו מיוחד אלא בעיקר בגרות מתמטית. אניח היכרות בסיסית עם מידת לבג, מושגים בהסתברות, וכמובן שליטה באינפי / חדו"א. היכרות בסיסית עם גיאומטריה רימנית, מרחבי בנך ומשוואת החום עשויה אף היא לעזור, אך אינה הכרחית. כאמור, הדגש יהיה על רעיונות ולא על בניית יסודות והתעקשות על ריגורוזיות יתר.

<u>סילבוס טנטטיבי</u>:

תורת Brunn-Minkowski של גופים קמורים וישומיה,
האי שיוויון האיזופרימטרי במרחב אוקלידי, על הספירה ועל מרחב גאוס, ואי-שיווני ריכוז מידה.
למת ג'ונסון-לינדנשטראוס על dimension-reduction.
נוסחת co-area והקשר בין איזופרימטריה לאי שיוויונים פונקציונליים כדוגמת Poincare, Sobolev ו--log-Sobolev .
ספקטרום הלפלסיאן, הפער הספקטרלי ואי שיוויון Faber-Krahn .
משוואת החום על יריעה רימנית עם מידה ושימושיה להוכחת אי-שיוונים פונקציונליים.
עקמומיות ריצ'י מוכללת והקשר למשוואת החום ולריכוז מידה. אי שיוויוני Lichnerowicz ו-Brascamp-Lieb.
תורת optimal-transport ושימושיה להוכחת אי שיוינים איזופרימטריים, פונקציונליים וריכוז מידה.