# בעיות וריאציוניות עבור העתקות עם ערכים ב־$S^k$

איתי שפריר

18 באפריל 2021

## 1. איפיון וריאציוני של פונקציות הרמוניות

תוצאה קלסית אומרת שהפתרון לבעיית השפה מסוג דיריכלא עבור פונקציות הרמוניות

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

מאופיין בתור הפתרון לבעיית מינימיזציה:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \min_{v=g\, on\, \partial\Omega} \int_\Omega |\nabla v|^2 . \tag{2}$$

כאן $\Omega$ הוא תחום חסום וחלק ב־$\mathbb{R}^n$, $g$ היא פונקציה (חלקה לשם פשטות) והמינימיזציה מתבצעת על פונקציות $v$ השייכות למרחב הפונקציות "הטבעי" עבור הבעיה, שהוא מרחב סובולב $H^1(\Omega)$ (ראו למשל [1]).

## 2. מפונקציות הרמוניות להעתקות הרמוניות

שאלה טבעית היא מה קורה אם מבצעים את המינימיזציה ב–(2) על אוסף העתקות שמקבלות ערכים ב–$S^k$, ספירת היחידה ב–$\mathbb{R}^{k+1}$, במקום על אוסף של פונקציות סקלריות. תהי אם כן נתונה $g : \partial\Omega \to S^k$ ונסתכל על הבעיה

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \min_{v \in H^1_g(\Omega, S^k)} \int_\Omega |\nabla v|^2 \tag{3}$$

כאשר אוסף הפונקציות המותרות הוא

$$H^1_g(\Omega,S^k)=\Big\{v=(v_1,\ldots,v_{k+1})\Big|v_j\in H^1(\Omega),\forall j,\sum_{j=1}^{k+1}v_j^2=1\,in\,\Omega,v=g\,on\,\partial\Omega\Big\}. \tag{4}$$

העתקה שמהווה פתרון לבעיית המינימיזציה, או באופן כללי יותר נקודה קריטית של פונקציונל האנרגיה ב–$(3)$, תיקרא **העתקה הרמונית**. חישוב נותן שהמשוואה שמקיימת העתקה הרמונית (האנלוגית ל–$(1)$) היא

$$-\Delta u=|\nabla u|^2u\,.$$

מסתבר שהבעיה $(3)$ שונה למדי מהבעיה $(2)$. למשל במקרה בו $\Omega=B^3$ (כדור היחידה ב–$\mathbb{R}^3$) ו–$g:\partial B^3=S^2\to S^2$ היא העתקת הזהות, $g(x)=x$, המינימייזר היחיד הוא $u(x)=\frac{x}{|x|}$, כלומר תיתכנה העתקות הרמוניות עם סינגולריות. זה לא כ"כ מפתיע במקרה הזה, כי לפי משפט בראוור לכל פונקציה רציפה ששווה לזהות על שפת הכדור חייבת להיות נקודה בתוך הכדור בה היא מתאפסת ולכן אין הרחבה רציפה של $g$ לכדור שמקבלת ערכים ב–$S^2$!

תכונות הרגולריות של העתקות הרמוניות, מסוג מינימייזר או לאו דווקא, נחקרו רבות בעבר. מסתבר שכאשר המימד של $\Omega$ הוא $2$, העתקות הרמוניות הן תמיד חלקות, בעוד שבמימד גבוה יותר תיתכנה נקודות סינגולריות, כפי שראינו בדוגמא לעיל ב–$B^3$.

## 3. העתקות הרמוניות עם ערכים ב–$S^1$

המקרה הפרטי $S^k=S^1$ נראה פשוט בצורה משמעותית ביחס למקרה הכללי. למעשה, העתקה $u$ עם ערכים ב–$S^1$ שניתן לרשום אותה בתור $u=e^{i\varphi}$ (מה שנקרא lifting או "הרמה") עם $\varphi$ **פונקציה סקלרית**, היא הרמונית אם ורק אם $\varphi$ היא פונקציה הרמונית (ז"א מקיימת את המשוואה ב–$(1)$). הבעיה היא שלא תמיד ניתן לבצע הרמה, ולמעשה לבעיה $(3)$ לא תמיד קיים פתרון!

נתבונן למשל בבעיה האנלוגית לזו שהזכרנו למעלה, אבל הפעם בעיגול היחידה $B^2$ ב–$\mathbb{R}^2$, עבור העתקות עם ערכים ב–$S^1$. אם כן, נתבונן במקרה $\Omega=B^2$ ותנאי השפה $g:\partial B^2=S^1\to S^1$ שהוא העתקת הזהות, $g(x)=x$. אנו טוענים שאין לבעיית המינימיזציה $(3)$ פתרון במקרה זה. ואמנם לפי התוצאה שהוזכרה בסעיף הקודם, במימד $2$ אם קיים פתרון $u$, אז הוא חייב להיות העתקה חלקה, ללא סינגולריות. אבל שוב, ממשפט

בראוור נובע שהדבר לא ייתכן כי לא קיימת הרחבה רציפה לעיגול עם ערכים ב–$S^1$ עבור תנאי שפה זה. מסתבר שהבעיה פה חמורה אף יותר: ניתן להראות שאוסף ההעתקות המותרות $H^1_g(B^2,S^1)$ במקרה זה הוא קבוצה ריקה! תופעה זו קורית כאשר הדרגה (או winding number) של תנאי השפה $g$ שונה מאפס.

## 4. "רלקסציה" של הבעיה

לבעיה האחרונה שהוזכרה בעיגול היחידה אמנם אין פתרון, אבל נראה טבעי לשער שההעתקה $u_0(x)=\frac{x}{|x|}$ יכולה להיות מועמדת להיות מעין "פתרון מוכלל" עבור הבעיה. האם ניתן להצדיק זאת מתמטית באיזושהי צורה? דרך אפשרית לעשות זאת היא להשתמש ב–Relaxation באופן הבא. עבור בעיה המוגדרת בתחום פשוט קשר $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ עם תנאי שפה $g:\partial\Omega\to S^1$ מדרגה שונה מאפס (שעבורו אנו יודעים שאין פתרון לבעיה), נגדיר משפחה של בעיות מקרבות, עם ערכים ב–$\mathbb{R}^2$ (או באופן שקול $\mathbb{C}$), התלויות בפרמטר $\varepsilon>0$, ונתבונן בגבול של הפתרונות כאשר $\varepsilon$ שואף ל–0. לכל $\varepsilon>0$ נגדיר פונקציונל אנרגיה

$$E_\varepsilon(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2 \tag{5}$$

ונסמן ב–$u_\varepsilon$ את המינימייזר של (5) מבין כל ההעתקות ב–$H^1_g(\Omega,\mathbb{R}^2)$. בגלל העובדה שהאיבר השני ב–(5) "מעניש" את ההעתקה $u$ אם ערכיה מתרחקים מ–$S^1$, אנו מצפים לקבל בגבול $\varepsilon\to 0$ העתקה עם ערכים ב–$S^1$ שנוכל לראות בה "פתרון מוכלל" לבעיה המקורית. נצפה אם כן שיתקיים $\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon=u_0$ עבור סוג התכנסות מתאים, לפחות עבור תת סדרה.

הבעיה נחקרה באופן מקיף ב–[2] ובהמשך גם במאמרים רבים נוספים. כבר ב–[2] התקבל איפיון מפורט של ההעתקה הגבולית $u_0$ לכל תנאי שפה אפשרי $g$. מסתבר שעבור "בעיית המודל" שציינו למעלה (זאת אומרת $\Omega=B^2, g(x)=x$) הגבול הסינגולרי $u_0$ המתקבל הוא אכן $u_0(x)=\frac{x}{|x|}$. אבל עבור תנאי השפה $g(x)=x^2=e^{2i\theta}$ (נזכיר שאנו מסתכלים על $x$ גם כעל מספר מרוכב) הגבול הוא לא ההעתקה $u(x)=\left(\frac{x}{|x|}\right)^2=e^{2i\theta}$ כפי שניתן היה לצפות אולי, אלא העתקה אחרת $u_0(x)=e^{i\varphi}\left(\frac{x-a}{|x-a|}\right)\left(\frac{x-b}{|x-b|}\right)$ עבור זוג נקודות $a\neq b$ ב–$B^2$.

הענין בבעית המינימיזציה של (5) אינו תיאורטי בלבד. אנרגיות מטיפוס זה מופיעות במספר תחומים בפיזיקה, כמו מודל גינזבורג–לנדאו במוליכות על (זו היתה המוטיבציה המקורית לספר [2]) ובתיאוריה של Liquid Crystals.

## 5. מודלים אחרים

יש כמובן דרכים נוספות לבצע "רלקסציה" של הבעיה המקורית. למשל, עבור $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ו–$g$ כמו למעלה, ניתן לחשב לכל $\varepsilon > 0$ את הפתרון $v_\varepsilon$ לבעית המינימיזציה של $\int_{B^2} |\nabla v|^{2-\varepsilon}$ עבור העתקות $v$ עם ערכים ב–$S^1$, שלה דווקא יש פתרון, ואז לחשב את הגבול $v_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon$. מסתבר שהגבול המתקבל הוא בדיוק זה שמתקבל מהרלקסציה של האנרגיה של גינזבורג–לנדאו (5). הדבר נכון גם למודלים אחרים אבל לא לכולם. דוגמא בה מתקבלת התנהגות שונה מזו שבמודל שנחקר ב–[2] אפשר למצוא ב–[3]. גם כאן הבעיה מוגדרת על תחום דו מימדי ופשוט קשר $\Omega$ שעל שפתו נתון תנאי שפה $g$ עם ערכים ב–$S^1$, ודרגה שונה מאפס, אבל הפונקציונל עבורו מחשבים את המינימייזר $v_\varepsilon$ מעל $H^1_g(\Omega, \mathbb{R}^2)$ לכל $\varepsilon > 0$ הוא

$$F_\varepsilon(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\Big)\big|\nabla |v|\big|^2. \tag{6}$$

נשים לב שהמחובר השני בפונקציונל "מעניש" העתקות שהמודול שלהן אינו "כמעט קבוע" (הבחירה במקדם $\frac{1}{\varepsilon^2} - 1$ במקום $\frac{1}{\varepsilon^2}$ אינה מהותית ונועדה לקבלת תוצאה נקיה יותר). לכן בגבול $\varepsilon \to 0$ נצפה למצוא העתקה $v_0$ עם מודול קבוע. מכיון שהמודול של תנאי השפה הוא 1 ההעתקה הגבולית $v_0$ אכן אמורה להיות עם ערכים ב–$S^1$, אבל היא חייבת כמובן להיות בעלת סינגולריות בשל התנאי על הדרגה. ב–[3] התקבל איפיון של הגבול $v_0$, אבל הוא שונה מזה שהתקבל עבור האנרגיה (5). בפרט נובע שעבור הבעיה ב–$\Omega = B^2$ עם תנאי השפה $g(x) = \big(\frac{x}{|x|}\big)^2$ מתקבלת לכל $\varepsilon$ קבוע נוסחה מפורשת פשוטה עבור המינימייזר (היחיד): $v_\varepsilon(x) = |x|^{2\varepsilon}\big(\frac{x}{|x|}\big)^2$. לכן ברור מכאן שהגבול $v_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon$ נתון ע"י $v_0(x) = \big(\frac{x}{|x|}\big)^2$. אם כן, בניגוד למקרה של (5) בו התקבל גבול עם שתי נקודות סינגולריות, כל אחת מדרגה 1, כאן לגבול יש נקודה סינגולרית יחידה מדרגה 2 הממוקמת בראשית.

יש עדיין מספר בעיות פתוחות מעניינות בקשר למודל (6) שלא נפתרו עדיין, למשל:

1. למעשה, נוסחה מפורשת למינימייזר לכל $\varepsilon$ התקבלה ב–[3] למחלקה של תנאי שפה על $B^2$ שהתקבלו ממכפלות Blaschke, ז"א $g = F\big|_{\partial B^2}$ עבור $F(x) = \prod_{j=1}^{D} \big(\frac{x-a_j}{|x-a_j|}\big)$, באשר $\{a_j\}_{j=1}^{D}$ נקודות ב–$B^2$ (לאו דווקא שונות, המקרה $a_j = 0$ לכל $j$ מתאים לתנאי השפה $g(x) = x^D$). עבור תנאי שפה שאינו ממחלקה זו ידועה הצורה של הגבול $v_0$ (עבור תת סדרה) אבל לא ידוע אם לכל $\varepsilon$ קבוע המינימייזר $v_\varepsilon$ יחיד וכן האם $v_0$ עצמו הוא יחיד או שייתכן שיתקבלו גבולות שונים עבור תת סדרות שונות כאשר $\varepsilon \to 0$.

2. עבור תנאי השפה $g(x) = x^D$ עם $D \geq 2$ ב–$B^2$, אמנם בעיית המינימיזציה נפתרה במלואה, אבל עדיין נותרה שאלה פתוחה ביחס לאפשרות קיומן של נקודות קריטיות אחרות. האם קיים, לפחות עבור $\varepsilon > 0$

קטן מספיק, מינימום מקומי $w_\varepsilon$ עם $D$ אפסים שונים, שייתכנס כאשר $\varepsilon \to 0$ לגבול סינגולרי $w_0$ עם $D$ נקודות סינגולריות שונות?

## רשימת מקורות


1. L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

2. F. Bethuel, H. Brezis and F. Helein, Ginzburg Landau Vortices, Birkhauser, 1994.

3. D. Golovaty and I. Shafrir, A variational singular perturbation problem motivated by Ericksen's model for Liquid Crystals, arXiv:1910.04626.